УДК 514.77

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СИМПЛЕКС-МЕТОДА ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ

THE USING OF THE SIMPLEX METHOD FOR CONVEX POLYTOPES APPROXIMATION

Булаев Владимир Владимирович, аспирант каф. «Прикладная математика», Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Россия, 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19; АО «Научно производственное объединение автоматики имени академика Н.А. Семихатова», Россия, 620075, г. Екатеринбург, ул. Мамина-Сибиряка, 145. E-mail: bulaev1991@mail.ru. Тел.: +7(982)734-77-35

Vladimir V. Bulaev, post graduate student, Department «Applied Mathematics», Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, 620002, Mira street, 19, Ekaterinburg, Russia; JSC «Scientific and Production Association of Automatics named after the academician N.A. Semikhatov», 620075, Mamina-Sibiryaka street, 145, Ekaterinburg, Russia. E-mail: bulaev1991@mail.ru. Ph.: +7(982)734-77-35

Аннотация: В статье предлагается подход для аппроксимации выпуклых многогранников с большим количеством вершин. В основе алгоритма лежит модифицированный симплекс-метод. Приводятся результаты аппроксимации для некоторых численных примеров.
Abstract: The paper suggests the approach to approximate the convex polytopes with large quantity of vertexes. The algorithm is based on modified simplex method. The approximation results for some numerical examples are presented.
***Ключевые слова*:** выпуклые множества; аппроксимация; симплекс-метод.
***Key words*:** convex sets; approximation; simplex method.

ВВЕДЕНИЕ

В ряде задач вычислительной геометрии возникает потребность в аппроксимации многогранных выпуклых множеств другими подобными множествами с заданной точностью. Примером таких задач может послужить задача построения многогранных областей достижимости дискретной динамической системы большой размерности или задача обработки информационных множеств.

В настоящей работе излагается подход к решению задачи аппроксимации выпуклых многогранников с заданной (в смысле нормы ℓ_1) точностью.

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Для построения дальнейших рассуждений примем несколько обозначений: $\mathbf{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство векторов-столбцов; $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$ – норма ℓ_1 вектора $x \in \mathbf{R}^n$, $\operatorname{conv}\mathbf{X}$ – выпуклая оболочка множества $\mathbf{X} \subset \mathbf{R}^n$.

Пусть исходный многогранник $\mathbf{M}$ задан набором своих вершин

$$\mathbf{M} = \operatorname{conv}\mathbf{V},\ \mathbf{V} = \left\{ v^{(j)} \in \mathbf{R}^n,\ j \in \overline{1,n} \right\},$$

где $\mathbf{V}$ – множество вершин $v^{(j)}$ многогранника $\mathbf{M}$.

В рамках этой статьи сформулируем задачу аппроксимации многогранника $\mathbf{M}$ многогранником $\tilde{\mathbf{M}}$ следующим образом: требуется определить вершины аппроксимирующего многогранника $\tilde{\mathbf{M}}$ такого, что

$$\begin{gathered}\rho_1(\mathbf{M}, \tilde{\mathbf{M}}) = \max_{x \in \mathbf{M}} \min_{y \in \tilde{\mathbf{M}}} \|x - y\|_1 < \varepsilon, \\ \varepsilon > 0,\ \tilde{\mathbf{M}} \subseteq \mathbf{M},\ \tilde{\mathbf{M}} = \operatorname{conv}\tilde{\mathbf{V}}, \\ \tilde{\mathbf{V}} = \left\{ \tilde{v}^{(j)} \in \mathbf{R}^n,\ j \in \overline{1,k},\ k \le n \right\}.\end{gathered} \tag{1}$$

Таким образом, задаваясь требуемой точностью $\varepsilon > 0$, из исходного множества вершин $\mathbf{V}$ можно исключить такие вершины, что многогранник $\tilde{\mathbf{M}}$, опирающийся на сокращенное множество вершин $\tilde{\mathbf{V}}$, будет отличен от исходного (в смысле меры $\rho_1(\cdot)$) менее чем на ε.

ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА АППРОКСИМАЦИИ

Для решения задачи (1) достаточно оценить величину невязки в конце первого этапа симплекс-алгоритма для следующей задачи линейного программирования:

$$f = \sum_j \lambda_j \to \min,$$
$$\sum_j \lambda_j v^{(j)} = v^{(i)},\ \sum_j \lambda_j = 1,\ \lambda_j \geq 0, \qquad (2)$$
$$j \in \overline{1,m},\ j \neq i.$$

Составим симплекс-таблицу для некоторой проверяемой вершины $v^{(i)}$ следующим образом:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nm} \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \sum_{k=1}^{n} a_{k1} + 1 & \cdots & \sum_{k=1}^{n} b_k + 1 & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{km} + 1 \end{bmatrix},$$
$$b_k \geq 0,\ k \in \overline{1,n},$$

где вектор $b = \{b_k\}_{k \in \overline{1,n}}$ соответствует проверяемой вершине $v^{(i)}$; векторы $a^{(j)} = \{a_{kj}\}_{k \in \overline{1,n}},\ j \in \overline{1,m}$ соответствуют остальным вершинам. Предпоследняя строка отражает ограничение, связанное с определением выпуклой комбинации. В последней строке записаны оценки замещения соответствующих столбцов и величина невязки (в столбце вектора b). Выбор направляющего столбца следует осуществлять по методу внебазисного градиента [1].

Отметим, что у задачи (2) не может существовать базисного допустимого решения, поскольку в системе ограничений задачи участвуют только вершины многогранника $\mathbf{M}$ и условие выпуклой комбинации.

Симплекс-алгоритм для такой задачи следует продолжать до тех пор, пока величина невязки не станет меньше ε, либо пока оценки замещения всех столбцов (кроме столбца вектора b) не станут отрицательными.

Если в конце работы алгоритма величина невязки принимает значение меньше чем ε, то значит проверяемую вершину можно исключить из рассмотрения. Более того, сразу же можно исключить вершины, удовлетворяющие следующим условиям

$$\left| a_{n+2,j} \right| < \varepsilon,\ a^{(j)} \notin \mathbf{B},\ j \neq i,$$

здесь $\mathbf{B}$ – множество базисных векторов.

В геометрической интерпретации это значит, что на вершинах, соответствующих базисным векторам, можно построить гиперплоскость H такую, что

$$\rho_1(v^{(i)}, H) < \varepsilon.$$

Следовательно, по теореме об отделимости [2], исходный многогранник и он же, но с отсеченной гиперплоскостью H частью, также будут отличны менее чем на ε.

ПРИМЕРЫ РАБОТЫ АЛГОРИТМА АППРОКСИМАЦИИ

На рис. 1 и 2 представлены результаты работы алгоритма аппроксимации в пространствах $\mathbf{R}^2$ и $\mathbf{R}^3$ соответственно.

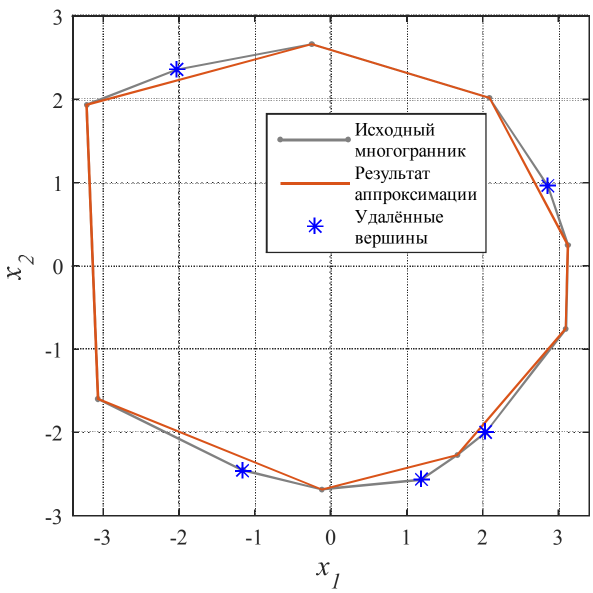

Рис. 1. Пример аппроксимации многогранника в $\mathbf{R}^2$

В обоих случаях параметр точности был принят равным $\varepsilon = \sqrt{0.05}$. Разница площадей многогранников в $\mathbf{R}^2$ при этом составила 0.8075, расстояние по Хаусдорфу составило 0.1915, количество вершин уменьшилось с 13 до 8. Разница объемов многогранников в $\mathbf{R}^3$ составила 2.5302, расстояние по Хаусдорфу составило 0.2032, количество вершин сократилось с 41 до 24.

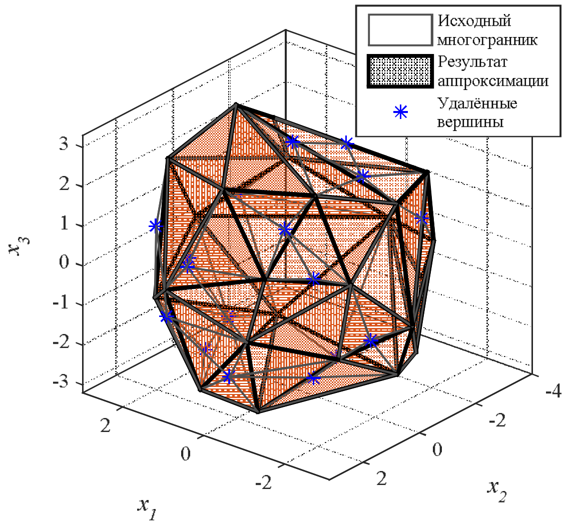

Рис. 2. Пример аппроксимации многогранника в $\mathbf{R}^3$

ОБСУЖДЕНИЕ

Отметим, что рассмотренный алгоритм может быть некоторым образом модифицирован. Например, величина невязки может рассматриваться только как индикатор того, что от проверяемой вершины можно достаточно близко построить отсекающую гиперплоскость H, опирающуюся на другие вершины многогранника. Затем в качестве критерия исключения вершины можно рассматривать расстояние от вершины до этой гиперплоскости:

$$\rho_2(v^{(i)}, H) = \min_{y \in H} \left\| v^{(i)} - y \right\|_2 ,$$

где $\left\| \cdot \right\|_2$ – евклидова норма. Причем это расстояние будет совпадать с мерой Хаусдорфа между исходным многогранником и им же, но без вершины $v^{(i)}$.

Также следует сказать, что для корректной работы алгоритма аппроксимации может понадобиться нормировка подпространства $\mathbf{R}^n$ в котором находится многогранник. Это объясняется тем, что координаты вершин должны быть соизмеримы, в противном случае в процессе работы алгоритма могут быть исключены «значимые» вершины.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенный алгоритм аппроксимации выпуклых многогранных множеств, заданных с помощью набора всех своих вершин, является достаточно простым и универсальным средством упрощения многогранников с большим количеством вершин. В результате применения алгоритма аппроксимации удается значительно сократить количество вершин, при этом рассогласование (в смысле нормы ℓ_1) между исходным и аппроксимированным многогранниками не превышает некоторой наперед заданной величины параметра точности ε. Однако, рассмотренный алгоритм нельзя назвать оптимальным с точки зрения минимизации необходимого количества вершин для аппроксимации многогранника с заданной точностью, поскольку здесь рассматривается лишь возможность удаления «незначительных» вершин, исключение которых не влечет существенных потерь.

Другой особенностью изложенного алгоритма является то, что многогранник, полученный в результате аппроксимации, всегда будет является подмножеством исходного многогранного множества. Таким образом, многогранник, полученный в результате аппроксимации, является внутренней оценкой исходного многогранника. В случае же, когда информация об удалённых вершинах является критичной, то есть необходимо получить внешнюю оценку, можно, например, «раздуть» аппроксимированный многогранник на величину, равную расстоянию Хаусдорфа.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1985. 512 с.
2. Циглер Г.М. Теория многогранников. М.: МЦНМО, 2014. 568 с.